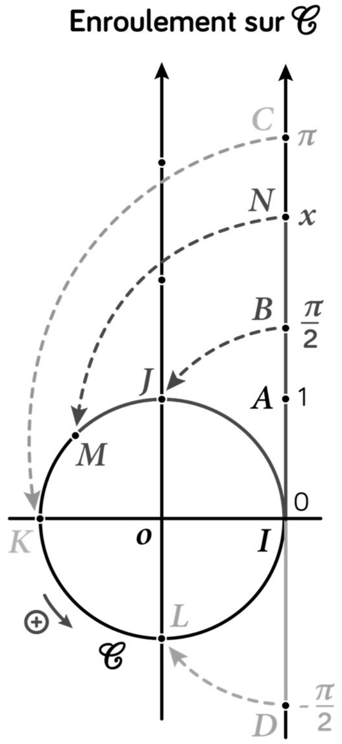
Angles en radians et trigonométrie

Vous pourrez créer vous-même une fiche de révision sur ce sujet : c'est un excellent entraînement !

1) Placer des réels sur le cercle trigonométrique.



Dans un repère orthonormé d'origine O donné, le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O, de rayon 1. Son périmètre est …... On dit qu'on tourne dans le sens positif, quand on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Soit d la droite parallèle à la droite (OJ), passant par I. Cette droite est appelée droite numérique. Chaque point sur cette droite correspond à un nombre (comme sur l'axe réel).

Si on « enroule » cette droite d sur le cercle, on fait correspondre à tout réel x un unique point M du cercle. En revanche, chaque point du cercle correspond à une infinité de réels, car on peut « enrouler » la droite en une infinité de tours autour du cercle.

Si M correspond à x, il correspond aussi à $x + 2\pi$ (en enroulant un tour de plus), à $x + 4\pi$, etc… Mais il correspond aussi à $x - 2\pi$ (en enroulant dans l'autre sens), à $x - 4\pi$, etc. On dit que x est la mesure en radians de l'angle de vecteurs ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$).

Définition : si x est un réel et M le point du cercle trigonométrique qui lui correspond en enroulant la droite numérique sur le cercle, alors M correspond à tous les réels qui peuvent s'écrire $x + k.\,2\pi$ où k est un entier positif ou négatif car 2 π correspond à un tour complet.

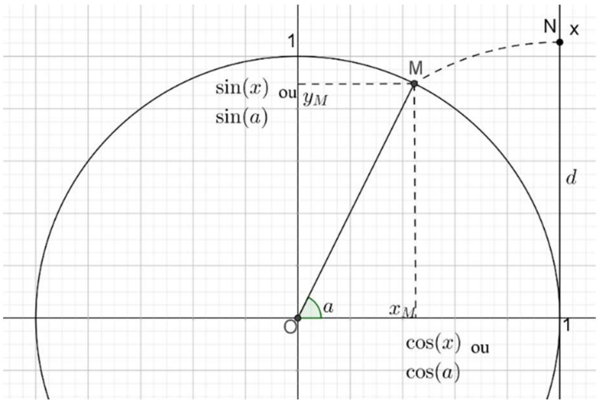
On dit que l'angle ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) mesure x radians (ou $x + 2\pi,\ x + 4\pi$ etc…).

Exemple : $\frac{\pi}{3}$ correspond aussi à $\frac{7\pi}{3}$ car $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

A savoir : l'ensemble des entiers positifs ou négatifs est l'ensemble des entiers relatifs et il est noté $\mathbb{Z}$.

2) <u>Lire le sinus et le cosinus sur le cercle trigonométrique.</u>

<u>Définition</u> : Dans le repère orthonormé $(O\,;\ I,\,J)$: si le point M correspond au réel x, c'est-à-dire si ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) = x , alors $\cos(x)$ est l'abscisse de M et $\sin(x)$ est l'ordonnée de M.



Exemples : Tous les exemples et exercices sont à traiter sans la calculatrice.

Déterminer cos (0), sin(0) cos(4π), sin(3π), cos($\frac{\pi}{2}$), sin($\frac{5\pi}{2}$)

Toutes les réponses sont données en fin de document.

3) <u>Valeurs remarquables</u>.

Il faut connaître sans hésitation le tableau suivant :

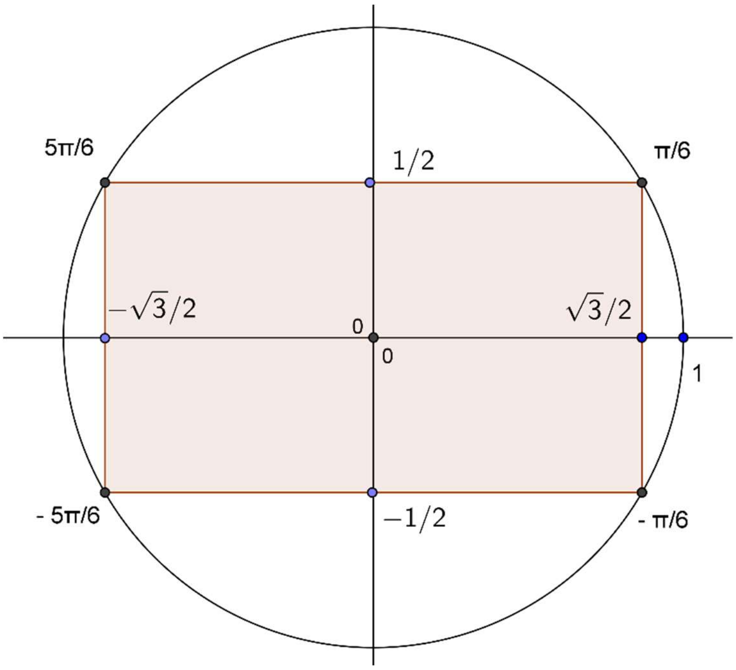
angle *a*	0	30°	45°	60°	90°
x (x en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos (x) ou cos (*a*)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin (x) ou sin(*a*)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Note : avec la calculatrice pour obtenir la bonne valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, par exemple, il faudra choisir le mode radians à la place de degrés (icône "paramètres").

Dans la suite, il faut vraiment comprendre que π radians représente un demi-tour, donc $\frac{\pi}{2}$ c'est la moitié de ce demi "camembert", $\frac{\pi}{4}$ c'est un quart de ce demi "camembert" etc… Il faut savoir placer tous les angles apparaissant dans la suite sur le cercle.

4) Famille $\frac{\pi}{6}$

Pour placer $\frac{\pi}{6}$ on utilise le fait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, donc l'ordonnée du point sur le cercle trigonométrique est $\frac{1}{2}$



Exemples : donner les sinus et cosinus suivants :

$\sin(-\frac{\pi}{6}) =$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) =$

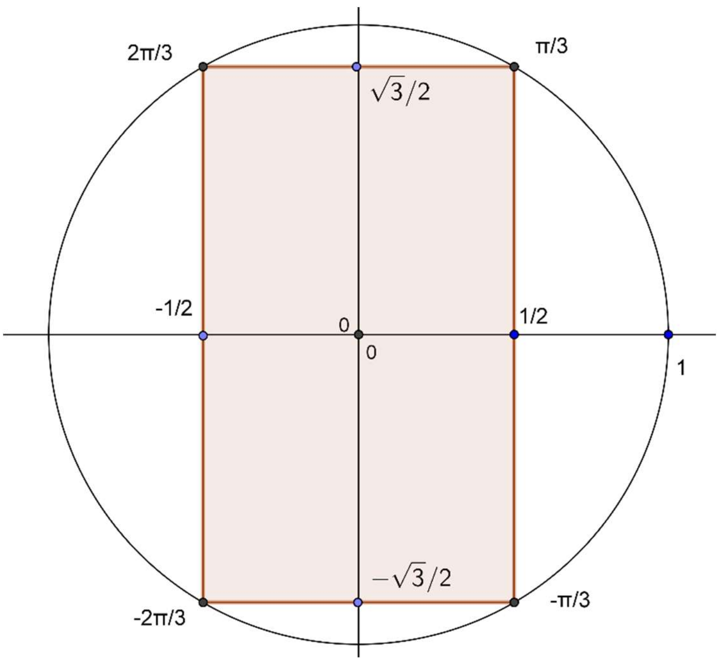
$\sin(\frac{13\pi}{6}) =$

$\cos(\frac{7\pi}{6}) =$

$\sin\left(-\frac{67\pi}{6}\right) =$

5) Famille $\frac{\pi}{3}$

Pour placer $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique, on utilise le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et donc que l'abscisse du point est $\frac{1}{2}$



Compléter :

$\cos(-\frac{\pi}{3}) =$

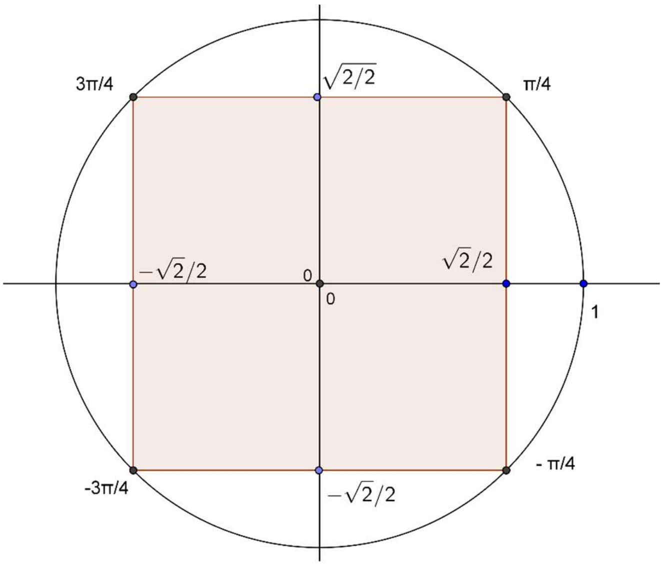
$\sin(\frac{5\pi}{3}) =$

$\cos(-\frac{2\pi}{3}) =$

$\sin(-68.\ \frac{\pi}{3}) =$

6) Famille $\frac{\pi}{4}$

Pour placer le point de coordonnées $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique, on utilise les diagonales des carreaux de la feuille



Compléter :

$\cos(\frac{3\pi}{4}) =$

$\cos(-\frac{\pi}{4}) =$

$\sin(\frac{5\pi}{4}) =$

$\cos(69\,\frac{\pi}{4}) =$

Réponses (note : $5.\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$)

$\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$; $\cos(4\pi) = 1$; $\sin(3\pi) = 0$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\sin(\frac{5\pi}{2}) = 0$

car 0 radian correspond au point de coordonnées (1 ; 0), et 4π aussi, 3π correspond au point de coordonnées (-1; 0), $\frac{\pi}{2}$ au point de coordonnées (0 ; 1) et $\frac{5\pi}{2}$ aussi.

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$; $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -$; $\sin(\frac{13\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On regarde le nombre de tours complets le plus proche de $-\frac{67\pi}{6}$. Or un tour complet c'est $2\pi = \frac{12\pi}{6}$, on regarde donc le multiple de 12 le plus proche de 67.

$\sin\left(-\frac{67\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ car $-\frac{67\pi}{6} = -\frac{6.(12\pi)}{6} + \frac{5\pi}{6}$

$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$; $\sin(-68.\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

car $-68.\frac{\pi}{3} = -66\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -11.\left(\frac{6\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3}$ et qu'un tour complet c'est $2\pi = 6.\frac{\pi}{3}$

$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(69\,\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ car $69\,\frac{\pi}{4} = 72\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$ et qu'un tour complet c'est $2\pi = \frac{8\pi}{4}$